Универзитет у Београду
Математички факултет

Једначине кретања у нелокалној модификацији гравитације

Иван Димитријевић

20.11.2019

Модификације Ајнштајнове теорије гравитације

Постоје различити правци модификације Ајнштајнове теорије гравитације.

- Ајнштајнова општа теорија релативности

Варијацијом дејства $S = \int \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{L}_m\right)\sqrt{-\mathrm{g}}d^4x$ добијамо једначине кретања.

Једначине кретања

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$, $c = 1$

где је $T_{\mu\nu}$ тензор енергије-импулса, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор, $R_{\mu\nu}$ је Ричијев тензор и R је скаларна кривина.
Главни савремени правци модификације:

- $f(R)$ модификација
- нелокална модификација

Нелокална модификација

Под нелокалном модификацијом гравитације подразумевамо замену скаларне кривине R у Ајнштајн-Хилбертовом дејству са подесном функцијом $F(R, \Box)$, где је $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ Даламберов оператор, а ∇_μ означава коваријантни извод.

Нека је M сада n-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метриком $(g_{\mu\nu})$ произвољне сигнатуре. Разматрамо класу модела нелокалне гравитације без материје која је дата следећим дејством

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M \Big(R - 2\Lambda + P(R) \mathcal{F}(\Box) Q(R) \Big) \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^n x,$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$ и Λ је космолошка константа.

Једначине кретања

Једначине кретања су

$$
\begin{aligned}
&G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R) + R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu} = 0, \\
&\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}\big(\Box^l P(R), \Box^{n-1-l} Q(R)\big), \\
&K_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box, \\
&S_{\mu\nu}(A,B) = g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A \nabla_\alpha B - 2\nabla_\mu A \nabla_\nu B + g_{\mu\nu} A \Box B, \\
&W = P'(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R) + Q'(R)\mathcal{F}(\Box)P(R).
\end{aligned}
$$

Оператор варијације

Дефиниција

Нека је V нормиран простор и $A \subset V$, $S : A \to \mathbb{R}$ функционал на A. Ако је $\eta \in V$ онда је варијација функционала S у парвцу η

$$\delta S(x,\eta) = \frac{\mathrm{d}S(x+\varepsilon\eta)}{\mathrm{d}\varepsilon}\|_{\varepsilon=0}.$$

Ова дефиниција се природно проширује на тензоре произвољног реда.

- δ је линеаран оператор на простору функционала,
- $\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g)$,
- Ако је T тензор типа (r,s) онда је и δT тензор типа (r,s).
- Ако је $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ Кристофелови симболи конексије ∇ онда је $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ тензорско поље типа $(1,2)$.

Оператор варијације

Лема

Нека је $(g_{\mu\nu})$ *метрички тензор и* $g = \det g_{\mu\nu}$. *Тада је*

$$\begin{aligned}
\delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\
\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \\
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left(g_{\nu\alpha} \nabla_{\mu} \delta g^{\lambda\alpha} + g_{\mu\alpha} \nabla_{\nu} \delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\lambda} \delta g^{\alpha\beta} \right),
\end{aligned}$$

Оператор варијације

Детерминанту g развијамо по $\mu-$ тој врсти

$$g_{\mu\nu}G^{(\alpha,\nu)} = g\delta_{\mu}^{\alpha},$$

$G^{(\mu,\nu)}$ је алгебарски кофактор елемента $g_{\mu\nu}$.
Тада је

$$g^{\mu\nu} = \frac{G^{(\mu,\nu)}}{g}.$$

Пошто је $G^{\mu,\nu}$ не зависи од $g_{\mu\nu}$добијамо да је

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Оператор варијације

Лема

Варијације кривинских тензора су дате са

$$\begin{aligned}
\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \nabla_\beta \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta},\\
\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda},\\
\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\\
\delta \nabla_\mu \nabla_\nu \psi &= \nabla_\mu \nabla_\nu \delta\psi - \nabla_\lambda \psi \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Оператор варијације

Варијација тензора кривине се добија на следећи начин:

$$\begin{aligned}\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \delta\left(\partial_\beta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\right)\\ &= \partial_\beta\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\\ &- \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\\ &= \nabla_\beta\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}.\end{aligned}$$

Контракцијом ове једнакости добијамо варијацију Ричијевог тензора, а за скаларну кривину примењујемо још једну контракцију

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)\\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(2\delta^{\mu}_{\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g^{\lambda\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}g_{\nu\beta}\Box\delta g^{\alpha\beta} - g_{\lambda\alpha}\Box\delta g^{\lambda\alpha}\right)\\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Извођење једначина кретања

Дејство S делимо на два помоћна дејства

$$S_0 = \int_M (R - 2\Lambda)\sqrt{-\mathrm{g}}\,\mathrm{d}^n x,$$
$$S_1 = \int_M P(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R)\sqrt{-\mathrm{g}}\,\mathrm{d}^n x.$$

Тада се варијација дејства S може изразити као

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\left(\delta S_0 + \delta S_1\right).$$

Такође нека су варијације метричких коефицијената и њихових извода једнаке нули на граници многострукости M.

Извођење једначина кретања

Лема

За сваку скаларну функцију $P(R)$ важи

$$\int_M P g_{\mu\nu}(\Box \delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M g_{\mu\nu}(\Box P)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

$$\int_M P \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M \nabla_\mu \nabla_\nu P\;\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

$$\int_M P K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M K_{\mu\nu} P\;\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x.$$

Извођење једначина кретања

Прву једнакост, добијамо вишеструком применом Стоксове теореме

$$\begin{aligned}\int_M P g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x &= \int_M P g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x\\ &= -\int_M \nabla_\alpha(P g_{\mu\nu})\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x\\ &= \int_M g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha P\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x\\ &= \int_M g_{\mu\nu}\Box P\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x.\end{aligned}$$

Извођење једначина кретања

Да бисмо доказали другу једначину посматрамо вектор $N^\mu = P\nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu P \delta g^{\mu\nu}$. Дивергенција $\nabla_\mu N^\mu$ се трансформише као

$$\begin{aligned}\nabla_\mu N^\mu &= \nabla_\mu (P\nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu P \delta g^{\mu\nu}) \\ &= \nabla_\mu P \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + P\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu P \, \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu P \nabla_\mu \delta g^{\mu\nu} \\ &= P\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu P \, \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Коначно, интеграцијом следи $\int_M \nabla_\mu N^\mu \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^n x = \int_{\partial M} N^\mu n_\mu \mathrm{d}\partial M$, где је n_μ јединична нормала хиперповрши ∂M. Како је рестрикција $N^\mu|_{\partial M}$ једнака нули, последњи интеграл се анулира.
Трећа једначина је директна последица претходне две.

Извођење једначина кретања

Варијацију n-тог степена $\Box$ оператора изражавамо у следећој леми

Лема

Нека су $P(R)$ и $Q(R)$ скаларне функције. Тада за $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\int_M P\delta\Box^n Q\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l P, \Box^{n-1-l}Q)\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x + \int_M \Box^n P\,\delta Q\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x.$$

Извођење једначина кретања

Из претходне две леме изводимо

Теорема

За сваке две скаларне функције Q и P важи

$$\int_M P\delta(\sqrt{-g})\,\mathrm{d}^n x = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}P\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

$$\int_M P\delta R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M (R_{\mu\nu}P - K_{\mu\nu}P)\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

$$\int_M P\delta(\mathcal{F}(\Box)Q)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M (R_{\mu\nu} - K_{\mu\nu})\,(Q'\mathcal{F}(\Box)P)\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l P, \Box^{n-1-l}Q)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x$$

Варијација дејства S_0

Дејство S_0 је Ајнштајн-Хилбертово дејство без материје и његова варијација је

Лема

Варијација од S_0 је

$$\delta S_0 = \int_M G_{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x + \Lambda \int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\delta g^{\mu\nu}\ d^4x,$$

где је $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ Ајнштајнов тензор.

Варијација дејства S_1

Користећи претходну теорему одређујемо варијацију дејства S_1.

Лема

Варијација дејства S_1 је

$$\delta S_1 = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu} P(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\,\mathrm{d}^n x + \int_M \left(R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\,\mathrm{d}^n x.$$

Варијација дејства S се добија из $S = \frac{1}{16\pi G}S_0 + S_1$.

Једначине кретања

Једначине кретања су

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 0,$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R) + R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu},$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}\big(\Box^l P(R), \Box^{n-1-l} Q(R)\big),$$

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box,$$

$$S_{\mu\nu}(A,B) = g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A \nabla_\alpha B - 2\nabla_\mu A \nabla_\nu B + g_{\mu\nu} A \Box B,$$

$$W = P'(R)\mathcal{F}(\Box)Q(R) + Q'(R)\mathcal{F}(\Box)P(R).$$

Приметимо да је $\nabla^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = 0$.
Такође може се показати да једначине кретања остају непромењене ако функције Q и P замене места.

Траг и 00-компонента једначина кретања

Претпоставимо да многострукост M има FRW метрику. Тада имамо две линеарно независне једначине (траг и 00-једначину):

$$
\begin{aligned}
&-2P\mathcal{F}(\Box)Q + RW + 3\Box W + \frac{1}{2}\Omega = R - 4\Lambda,\\
&\frac{1}{2}P\mathcal{F}(\Box)Q + R_{00}W - K_{00}W + \frac{1}{2}\Omega_{00} = -(G_{00} - \Lambda),\\
&\Omega = g^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Друга варијација

Друга варијација дејства S је

$$\delta^2 S = \delta(\delta S)$$

У наставку уводимо ознаку $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ и $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Тада је$h^{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}$.

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int_M \hat{G}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, \mathrm{d}^n x.$$

На основу прве варијације имамо

$$\delta^2 S = \frac{1}{16\pi G} \int_M \left(\delta \hat{G}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \hat{G}_{\mu\nu} \delta^2 g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \hat{G}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \, \mathrm{d}^n x$$

Друга варијација

Оператор $\delta\Box$ ис се дефинише са $(\delta\Box)V = \delta(\Box V) - \Box\delta V$. Тада важи следећа лема која даје још једну интерпретацију функције $S_{\mu\nu}(A,B)$.

Лема

Нека су U, V скаларне функције. Тада је

$$(\delta\Box)V = -h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V - \nabla^\mu h^\lambda_\mu \nabla_\lambda V + \frac{1}{2}\nabla^\lambda h \nabla_\lambda V,$$

$$\int_M U(\delta\Box)V\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \frac{1}{2}\int_M S_{\mu\nu}(U,V)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x.$$

Друга варијација

Доказ прве једнакости је

$$
\begin{aligned}
(\delta\Box)V &= \delta(\Box V) - \Box\delta V \\
&= -h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda V \\
&= -h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\nabla_\mu h^\lambda_\nu + \nabla_\nu h^\lambda_\mu - \nabla^\lambda h_{\mu\nu})\nabla_\lambda V \\
&= -h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V - \nabla^\mu h^\lambda_\mu\nabla_\lambda V + \frac{1}{2}\nabla^\lambda h\nabla_\lambda V.
\end{aligned}
$$

Интеграцијом по многострукости M добија се

$$
\begin{aligned}
&\int_M U(\delta\Box)V\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x \\
&= -\int_M (U\nabla_\mu\nabla_\nu V - \nabla_\mu(U\nabla_\nu V) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\lambda(U\nabla_\lambda V))h^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x \\
&= \frac{1}{2}\int_M S_{\mu\nu}(U,V)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x.
\end{aligned}
$$

Друга варијација

Као директну последицу претходне леме добијамо

Лема

Нека су U, V скаларне функције. Тада је,

$$\int_M U\delta(\mathcal{F}(\Box))V\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l U, \Box^{n-1-l}V)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x$$

$$\int_M U\delta W\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x = \int_M (R_{\mu\nu}Y - K_{\mu\nu}Y + \frac{1}{2}\Psi_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

$$Y = U(P''\mathcal{F}(\Box)Q + Q''\mathcal{F}(\Box)P) + (P'\mathcal{F}(\Box)(Q'U) + Q'\mathcal{F}(\Box)(P'U)),$$

$$\Psi_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\left(S_{\mu\nu}(\Box^l(P'U), \Box^{n-1-l}Q) + S_{\mu\nu}(\Box^l(Q'U), \Box^{n-1-l}P)\right)$$

Друга варијација

Као директну последицу претходне леме добијамо

Лема

Варијација $\delta\Omega_{\mu\nu}$ се изражава на слдећи начин

$$
\begin{aligned}
&\int_M \delta\Omega_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x\\
&= \int_M \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\Big(h_{\mu\nu}\nabla^\lambda\Box^l P\nabla_\lambda\Box^{n-1-l}Q + h\nabla_\mu\Box^l P\nabla_\nu\Box^{n-1-l}Q\\
&+ h_{\mu\nu}\Box^l P\Box^{n-l}Q - \frac{1}{2}S_{\mu\nu}(h\Box^l P,\Box^{n-1-l}Q)\\
&+ R_{\mu\nu}P'\Box^l(\sigma_1(\Box^{n-1-l}Q)) - K_{\mu\nu}(P'\Box^l(\sigma_1(\Box^{n-1-l}Q)))\\
&+ R_{\mu\nu}Q'\Box^l(\sigma_2(\Box^{n-1-l}P)) - K_{\mu\nu}(Q'\Box^l(\sigma_2(\Box^{n-1-l}P)))\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x\\
&+ \frac{1}{2}\int_M \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=0}^{l-1}\Big(S_{\mu\nu}(\Box^m(\sigma_1(\Box^{n-1-l}Q)),\Box^{l-m-1}P)\\
&+ S_{\mu\nu}(\Box^m(\sigma_2(\Box^{n-1-l}P)),\Box^{l-m-1}Q)\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x
\end{aligned}
$$

Друга варијација

где су σ_1 и σ_2 дефинисани као

$$\sigma_1(B) = \nabla^\lambda h \nabla_\lambda B - 2\nabla_\mu h^{\mu\nu}\nabla_\nu B - 2h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu B,$$

$$\sigma_2(A) = -\nabla^\lambda h \nabla_\lambda A - A\Box h - 2\nabla_\nu h^{\mu\nu}\nabla_\mu A - 2h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu A.$$

Друга варијација

Комбиновањем претходих лема добијамо другу варијацију дејства S у облику

$$\delta^2 S = \frac{1}{16\pi G}\int_M \left(U_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}X - K_{\mu\nu}X + \frac{1}{2}\chi_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\Theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^n x,$$

где је

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}(R - 2\Lambda + P\mathcal{F}(\Box)Q) + \delta R_{\mu\nu}(W+1) + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_\lambda W \\
&\quad + h_{\mu\nu}\Box W - \frac{1}{2}S_{\mu\nu}(h, W), \\
X &= \frac{1}{2}(h + P'h\mathcal{F}(\Box)Q + Q'\mathcal{F}(\Box)(Ph)) + \Big(\delta R(P''\mathcal{F}(\Box)Q + Q''\mathcal{F}(\Box)P) \\
&\quad + (P'\mathcal{F}(\Box)(Q'\delta R) + Q'\mathcal{F}(\Box)(P'\delta R))\Big), \\
\chi_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}(\Box^l(Ph), \Box^{n-l-1}Q) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\left(S_{\mu\nu}(\Box^l(P'\delta R), \Box^{n-1-l}Q) + S_{\mu\nu}(\Box^l(Q'\delta R), \Box^{n-1-l}P)\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\Big(h_{\mu\nu}\nabla^\lambda\Box^l P\nabla_\lambda\Box^{n-1-l}Q + h\nabla_\mu\Box^l P\nabla_\nu\Box^{n-1-l}Q \\
&\quad + h_{\mu\nu}\Box^l P\Box^{n-l}Q - \frac{1}{2}S_{\mu\nu}(h\Box^l P, \Box^{n-1-l}Q) \\
&\quad + (R_{\mu\nu} - K_{\mu\nu})(P'\Box^l(\sigma_1(\Box^{n-1-l}Q)) + Q'\Box^l(\sigma_2(\Box^{n-1-l}P)))\Big), \\
\Theta_{\mu\nu} &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=0}^{l-1}\Big(S_{\mu\nu}(\Box^m(\sigma_1(\Box^{n-1-l}Q)), \Box^{l-m-1}P) \\
&\quad + S_{\mu\nu}(\Box^m(\sigma_2(\Box^{n-1-l}P)), \Box^{l-m-1}Q)\Big),
\end{aligned}$$

Хвала на пажњи!